

2.4 Mathematische Bildung

Präambel

Was verstehen wir unter mathematischer Bildung und warum ist sie relevant?

Mathematik ist eine Sprache für Muster und Problemlösungen. Die Untersuchung von Figuren und das Rechnen mit Zahlen sind zentrale Bestandteile. Mathematik ist ein grundlegender Teil unserer Kultur und bietet oft Lösungen für praktische Probleme des Alltags. Schon seit frühester Menschheitsgeschichte verwenden Menschen mathematische Konzepte, um ihre Umwelt zu erfassen und zu beschreiben. Im Laufe der Jahrhunderte führten mathematische Problemlösungen immer wieder zu neuen begrifflichen Sprech- und Schreibweisen und auch zu neuen mathematischen Ideen. Zu einer der letzten Entwicklungsstufen gehört die Idee, Mathematik als die Wissenschaft von Mustern zu verstehen, wobei der Begriff des Musters hier weiter gefasst ist als im Alltag üblich. Er bezieht sich nicht nur auf sichtbare Muster wie zum Beispiel auf Dekore und Ornamente, sondern umfasst auch abstrakte Strukturen wie zum Beispiel Punktemuster oder Zahlenfolgen. Muster kommen überall in der Natur vor und können sehr unterschiedliche Ausprägungen annehmen, z.B. in Form von Symmetrien bei Blättern und Blüten oder auch bei Klangmustern. Der Begriff des Musters erlaubt es strukturelle Beziehungen zu erkennen und zu beschreiben. Muster finden sich auch in der »Rechenkunst« (Arithmetik). Sie lassen sich auch in regelmäßigen bzw. unregelmäßigen geometrischen Formen erkennen.

Definition mathematischer Grundbildung durch die OECD:

„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.“

(Deutsches PISA-Konsortium 2001, S. 23)

Die Welt ist voller Problemstellungen, die man mathematisch betrachten kann. Sie können so in einer ganz bestimmten Art und Weise in Sprache, in Bildern und in Symbolen formuliert und abgebildet sein. Die Welt unter mathematischer Perspektive wahrnehmen und beschreiben zu können ist allerdings keine angeborene Fähigkeit, sondern muss in der Interaktion mit anderen Menschen erlernt werden, die mathematisches Denken vor allem durch das Reden über Mathematik mit angemessenen Begriffen anregen.

35 Mathematische Bildung bedeutet, dass Kinder und Jugendliche in der Lage sind, wichtige Phänomene der Welt in einer spezifischen Art und Weise zu erkennen und zu verstehen. Dass Kinder und Jugendliche mithilfe mathematischer Konzepte Probleme lösen können, ist somit das Ziel mathematischer Bildung.

Sie kann so ein „Werkzeug“ sein, um alltägliche Probleme zu lösen. Mathematische Bildung hat damit auch einen aufklärerischen Aspekt. Erst durch das Verständnis bestimmter Konzepte sind Kinder und Jugendliche in der Lage, mündig an bestimmten Lebensbereichen teilzunehmen. Ein häufig genanntes Beispiel dafür ist die Zinsrechnung: So bildet das
40 mathematische Verständnis von Zinsmodellen eine Voraussetzung für die kritische Reflexion der individuellen und gesellschaftlichen Folgen von Zinsen. Über mathematische Bildung werden bestimmte Phänomene der natürlichen und kulturellen Umwelt überhaupt erst sichtbar gemacht, z.B. indem Kinder und Jugendliche eine Vorstellung davon erhalten, was exponentielles Wachstum bedeutet, ein Konzept, das grundlegend für das Verstehen
45 ökologischer wie ökonomischer Prozesse ist.

Mathematische Bildung bedeutet auch, dass Kinder und Jugendliche über ein Verständnis der speziellen Sprache, der Bilder und der Symbole der Mathematik verfügen. Es geht demnach um ein Kennenlernen und Begreifen der kulturell geschaffenen mathematischen Konzepte („Kulturgut“), damit diese anwendungsfähig werden.

50 Mathematische Bildung unterstützt zudem auf eine bestimmte Art und Weise denken zu können („Denkschule“), die in der Auseinandersetzung mit anderen erworben wird. Es werden feste Begriffe erworben, mit denen bestimmte Umwelterfahrungen exakt beschrieben werden können (z.B. ein Schrank ist ein Körper, der einem Quader ähnlich ist). Das Lernen von Regeln, wie zum Beispiel Mengen und Teilmengen zu einander stehen,
55 schult das logische Denken. Mathematisch Gebildete können nachvollziehbar argumentieren und Aussagen präzise formulieren. Diese Fähigkeiten sind nicht nur relevant für die Mathematik selbst, sondern sind essenziell für jeden Lebensbereich. Eine Stärkung des logischen Denkvermögens versetzt Kinder und Jugendliche in die Lage, auch bei alltäglichen Themen strukturiert zu arbeiten.

60 Darüber hinaus gilt es, die Bedeutung von Mathematik für Kultur und Gesellschaft zu erfassen. Dies gilt sowohl in historischer Hinsicht, als für die Mathematik als „aktives Forschungsgebiet“, in dem Ideen entwickelt, Probleme gelöst und Strukturen verstanden werden.

Mathematische Fähigkeiten sind Schlüsselfähigkeiten, die in vielen Bildungs- und
65 Lebensbereichen eine Rolle spielen.

Welche zentralen Schwerpunkte und Bildungsaufgaben gibt es im Bildungsbereich Mathematische Bildung?

70 Entscheidend ist, dass Kinder und Jugendliche mit verschiedenen mathematischen Konzepten bzw. Leitideen umgehen können. „um „die Phänomene zu erfassen“ und zu beschreiben, „die man sieht, wenn man die Welt mit mathematischen Augen betrachtet“¹:

Dazu gehören:

- Zahl,
- Messen,
- Raum und Form,
- 75 • Relationen,
- Muster und Strukturen,
- funktionaler Zusammenhang,
- Daten und Zufall.

80 Wichtig ist dabei die Unterstützung mathematischer Grundkompetenzen: das mathematische Argumentieren, das mathematische Lösen von Problemen, das mathematische Modellieren, das Verwenden mathematischer Darstellungen und Bezeichnungen, der Umgang mit symbolischen Elementen. Diese Kompetenzen sind Ergebnis und Voraussetzung zugleich für die Auseinandersetzung mit mathematischen Aspekten.

85 Kinder und Jugendliche müssen die Chance bekommen, die Bedeutung und Reichweite dieser mathematischen Konzepte zu erfassen. Innerhalb der Bildungsangebote muss daher sichtbar werden, in welchen Situationen Mathematik zum Werkzeug werden kann und wozu mathematischen Denken von Nutzen ist.

90 Die Erfahrung von Mathematik als „Kulturgut“, in dem über Tausende von Jahren immer wieder wichtige Entdeckungen, Ideen, Probleme und deren Lösungen für die Gesellschaft bereitgehalten wurden, kann Kinder und Jugendliche zudem anregen, selbst über aktuelle Probleme nachzudenken und ihre eigenen mathematischen Konzepte darauf anzuwenden.

¹ Blum u.a. 2006, S. 20

Welche individuellen und sozialen Unterschiede gibt es im Bildungsbereich Mathematische Bildung, die besonders zu beachten sind?

95 Eltern und Pädagogen beeinflussen aufgrund ihrer eigenen Erfahrungen und Sichtweisen sowohl das Interesse an Mathematik, als auch die Überzeugung, Mathematik zu beherrschen, maßgeblich. Dieser Aspekt ist besonders zu berücksichtigen. So erleben Kinder und Jugendliche, dass Mathematik und mathematische Bildung als unterschiedlich bedeutsam und unterschiedlich schwierig eingeschätzt werden. Oftmals wird der Nutzen mathematischer Bildung hauptsächlich Experten in beruflichen Bereichen (Ingenieure, 100 Ökonomen usw.) zugeschrieben. Geschlechtsstereotype Einstellungen und Erwartungen können zudem das Selbstkonzept ungünstig beeinflussen, so dass Mädchen auch bei vergleichbaren mathematischen Leistungen ein geringeres Selbstvertrauen als Jungen aufweisen. Dies kann wiederum dazu führen, dass Auseinandersetzungen mit 105 mathematischen Phänomenen weniger von Mädchen als von Jungen bevorzugt werden.

Wichtig ist, dass Pädagogen den individuellen Lebenswelten von Kindern und Jugendlichen gerecht werden, indem sie unterschiedliche, zunächst praxisrelevante, Zugänge und differenzierte Anforderungsniveaus mathematischer Bildung ermöglichen und dabei das Geschlecht überhaupt nicht thematisieren. Entsprechend ist z.B. eine positive 110 Berücksichtigung individueller mathematischer Denkweisen von Vorteil: Ein unterschiedliches Problemlöseverhalten ist u.a. darin begründet, welche Vorstellungen mathematischer Begriffe(eher statische oder eher dynamische) Kinder und Jugendliche bevorzugen.

Besonderheiten im mathematischen Denken bestehen z.B. bei Dyskalkulie. Kinder und 115 Jugendliche haben hierbei vor allem Probleme beim Rechnen mit Zahlen, in der Einschätzung von Mengen und Relationen. Das führt zu Schwierigkeiten in allen Bereichen des alltäglichen Lebens. Die Schwierigkeiten treten nicht in allen mathematischen Bereichen auf, so sind Kinder und Jugendliche mit Dyskalkulie oft durchaus in der Lage, abstraktere mathematische Probleme zu lösen. Kinder und Jugendliche mit Dyskalkulie benötigen 120 besondere Aufmerksamkeit und ein hohes Maß an individueller Förderung, insbesondere in schulischen Kontexten. Dies gilt jedoch generell für alle Kinder und Jugendlichen mit Schwierigkeiten im mathematischen Bereich, unabhängig einer bestimmten diagnostischen Einordnung.

Die bei mathematischen Operationen zugrunde liegenden kognitiven Prozesse und 125 Mechanismen können individuell unterschiedlich sein. Es gilt daher Raum für individuelle mathematische Problemlöseprozesse zu geben.

Welche bedeutsamen Aspekte sind hinsichtlich der Kooperation der Pädagogen (untereinander, mit Eltern) zu beachten? (insbesondere in Bezug auf institutionelle Übergänge)

- 130 Unterstützend für Kinder und Jugendliche ist es, wenn Pädagogen und Eltern ihre Sichtweisen von „mathematical literacy“ als einen grundlegenden Zugang zur Welt aufeinander abstimmen. Besonders am Übergang zwischen Kindertagesstätte und Grundschule bedarf es einer engen Kooperation zwischen den Professionen, um individuelle Interessen und Fähigkeiten von Kindern und Jugendlichen berücksichtigen zu können.
- 135 Von Vorteil ist es zudem, wenn Eltern und Pädagogen eine gemeinsame Fehlerkultur handhaben, die auf eine Ermutigung von Kindern und Jugendlichen abzielt, sich (weiter) mit mathematischen Aspekten auseinanderzusetzen. Individuelle Ansätze sollten aufgegriffen und diskutiert werden, um mathematische Denkprozesse zu unterstützen.

Welche Bildungskontexte sind bedeutsam?

- 140 Mathematische Bildungsprozesse umfassen weitausmehr als beispielsweise das Zählen oder das Beherrschen von Grundaufgaben. Sie beinhalten unter anderem die Strukturierung von Alltagserfahrungen und Alltagssituationen durch die Entdeckung bzw. Verwendung von Mustern. Deshalb sind mathematische Bildungsprozesse an ganzheitliche Lernprozesse gebunden. Sie können dort in Gang kommen, wo Kindern und Jugendlichen
- 145 anregungsreiche Umwelten zur Verfügung stehen, in denen strukturierte und unstrukturierte Materialien vorhanden sind, die das Entdecken, Ausprobieren und Verändern von Mustern ermöglichen. Es ist wichtig diese Bildungsangebote Jungen und Mädchen gleichermaßen zur Verfügung zu stellen. Das Zusammenwirken von Wahrnehmung und Bewegung ist schon im frühkindlichen Bereich auch für mathematische Bildung grundlegend. In
- 150 alltäglichen Situationen können mathematische Operationen erfahren werden, beispielsweise, indem etwas gerecht aufgeteilt wird; bei der Entdeckung, dass viele Tiere vier Beine haben; bei der Erfahrung, dass am eigenen Körper zwei Beine, Arme, Augen, Ohren vorhanden sind usw. Aus der Lebenswirklichkeit und von alltäglichen Notwendigkeiten erschließen sich mathematische Sachverhalte: ob von Dingen viel oder
- 155 wenig zur Verfügung steht; ob etwas mehr oder weniger, gleichviel oder gar nicht vorhanden ist. Weitere Beispiele sind: beim Einkaufen die Überschlags-Rechnung und die Anwendungen der Prozentrechnung, beim Lesen von Diagrammen das Verständnis für Wahrscheinlichkeiten und beim Nutzen von Fortbewegungsmitteln das Schätzen von Entfernungen von Bedeutung. Eine besondere Rolle nimmt vor allem die Modellierung von

160 realen Situationen ein, um anschließend mit mathematischen Hilfsmitteln sachgerechte Entscheidungen zu treffen. Mithilfe dieser vielseitigen Kenntnisse können sich Kinder und Jugendliche selbstständig ökologische und ökonomische Zusammenhänge erschließen und diese angemessen bewerten. Auch beim Umgang mit Medien (z.B. Computer) erfahren Kinder und Jugendliche mathematische Grundprinzipien wie z.B. Ordnungsstrukturen.

165 Unterstützend sind demnach Erwachsene, die Kinder und Jugendliche für alltägliche Situationen und Zusammenhänge sensibilisieren, in denen mathematische Sachverhalte eine Rolle spielen und zugleich weitere Bildungsbereiche (z.B. musikalische Bildung, bildnerisch-gestaltende Bildung sowie naturwissenschaftlich-technische Bildung) als Kontexte mathematischer Bildungsprozesse nutzen.

170 **Wie verändert sich mathematische Bildung in der Entwicklung?**

Mathematische Bildung ist eng mit der kognitiven Entwicklung verknüpft. Mit fortschreitender Entwicklung und steigendem Wissen können Kinder und Jugendliche zunehmend komplexere und abstraktere Konzepte verarbeiten. Auch wenn Mathematik in der späteren Entwicklung meist mit Schule assoziiert wird, finden sich dennoch im gesamten Alltag

175 mathematische Probleme und damit die Notwendigkeit entsprechende Konzepte anzuwenden.

Basale mathematische Bildung

Die Voraussetzungen für die Auseinandersetzung mit mathematischen Mustern sind in der Natur des Menschen angelegt. Bereits vor der Geburt entwickeln sich differenzierte

180 Wahrnehmungen z.B. akustischer Art. Und schon früh setzen mathematische Bildungsprozesse ein, die durch konkrete Gegebenheiten ausgelöst werden, sobald Kinder damit beginnen, sich zu bewegen und die Umwelt mit allen Sinnen wahrzunehmen. Schon bei den ersten Bewegungsversuchen besteht die Notwendigkeit einer Orientierung. Die Umwelt wird in spielerischen Situationen gemeinsam mit anderen Menschen erfahren. Sie

185 entdecken und erkunden in unterschiedlichen Räumen ihrer alltäglichen Umgebung verschiedenste Materialien. Wichtig ist, dass die Bezugspersonen in ihren Interaktionen das Begreifen von Beziehungen und Regelmäßigkeiten, also das frühe Verständnis für Muster im mathematischen Sinne unterstützen. In unterschiedlichen räumlichen und sozialen Kontakten werden erste Orientierungen im Raum und in der Zeit ausdifferenziert. So werden
190 beispielsweise regelmäßig wiederkehrende Elemente des Tagesablaufes (z.B. das Tischdecken) erkannt und damit begonnen, kleine Anzahlen wiederzuerkennen. Drinnen und draußen sammeln Kinder und Jugendliche vielfältige Erfahrungen mit Mengen und mit

Anzahlen, mit Formen und mit Eigenschaften künstlicher sowie natürlicher Materialien. Sie finden Mengen, Größenverhältnisse sowie vielfältige Muster in ihrer Umwelt vor, verändern sie und schaffen neue. Dies gelingt besonders mit handlichen Materialien, die hinsichtlich ihrer Form, Farbe und Größe untersucht werden können. In der Interaktion mit anderen Menschen werden ihre Orientierungsmöglichkeiten in der größer werdenden Umgebung erweitert. Parallel mit dem anwachsenden Wissen entwickeln sich auch die sprachlichen Möglichkeiten, über einfache mathematische Sachverhalte zu kommunizieren. Basale mathematische Bildungsprozesse schließen somit die Entdeckung und die Analyse von Mustern mit allen Sinnen und auch mit wachsender Abstraktheit ein.

Elementare mathematische Bildung

Auf der Grundlage sich erweiternder Denk- und Handlungsmöglichkeiten können sich Kinder und Jugendliche mit zunehmend komplexeren Mustern auseinandersetzen. Alle Dinge und Vorgänge in der Umgebung sind geeignet, um das Interesse an mathematischen Fragestellungen zu initiieren und zu vertiefen. Sowohl Regelmäßigkeiten als auch Unregelmäßigkeiten können dazu dienen, die Erkundung von Mustern im mathematischen Sinne zu unterstützen. Kinder und Jugendliche können Veränderungen und Umgestaltungen von Mustern sprachlich beschreiben. Es gelingt ihnen aufgrund von sprachlichen Äußerungen und in der Kommunikation mit anderen Kindern und Jugendlichen sowie mit Erwachsenen, selbst Veränderungen in Mustern vorzunehmen. Im gemeinsamen Umgang mit Formen, Mengen und Zahlen erwerben Kinder und Jugendliche ausdifferenzierte Möglichkeiten, ihre Sicht der Dinge darzustellen und zu begründen sowie nach Ursachen und Beziehungen zu fragen. Ausgehend von der Fragestellung, wie viele Dinge vorhanden, d.h. wovon weniger, mehr oder gleichviel vorhanden sind, setzen sie sich intensiv mit Mengen und mit den die Menge repräsentierenden Zahlen auseinander. Das Vergleichen von Mengen, die Feststellung von Unterschieden sowie das Zählen sind wichtige Strategien, die Kinder und Jugendliche in elementaren mathematischen Bildungsprozessen weiterentwickeln können. Hierbei greifen die Entwicklung des Mengen-, des Zahl- und des Operationsverständnisses ineinander. Das Vergleichen von Mengen und das Zählen der einzelnen Elemente von Mengen sind zugleich wichtige Strategien, um Alltagsprobleme praktisch zu lösen. Deshalb können viele Alltagssituationen dazu genutzt werden, um die mathematischen Interessen und das Wissen der Kinder und Jugendliche über Muster im mathematischen Sinne weiterzuentwickeln. Elementare mathematische Bildungsprozesse unterstützen die Denkentwicklung von Kindern in besonderer Weise: Können Kinder und Jugendliche zunächst auf ein anschauliches Vorgehen, wie zum Beispiel die Paarbildung

zugreifen, so entwickeln sie zunehmend symbolische, also abstrakter werdende Formen der Problemlösung.

Primare mathematische Bildung

230 Die mathematische Bildung im Primarbereich umfasst rechnerische (arithmetische) und geometrische Möglichkeiten im Umgang mit mathematischen Mustern sowie komplexere mathematische Lösungen von Alltagsproblemen. Zur Entwicklung solider Zahlvorstellungen für Zahlen im Raum bis zu einer Million dienen unterschiedliche Kontexte. Kinder und Jugendliche lernen dabei, dass Zahlen Anzahlen (Mengen) symbolisieren und Zahlen in

235 unterschiedlichen Sinnzusammenhängen verschiedene Aspekte betonen. Unterschiedliche Größen in verschiedenen Kontexten dienen dazu klare Größenvorstellungen zu entwickeln, um alltägliche Situationen zu verstehen. Voraussetzung für die Entwicklung des sicheren Rechnens ist die Verfügbarkeit von grundlegenden Wissensbeständen wie dem Einspluseins und dem Einmaleins. Dieses Können bildet die Grundlage für das sichere

240 Anwenden des halbschriftlichen und schriftlichen Rechnens. Dabei sind Kinder und Jugendliche in der Lage, zwischen verschiedenen Rechenverfahren abzuwägen. Für das Erlernen eines kompetenten Einsatzes moderner Rechenhilfsmittel wie Taschenrechner und Computersoftware ist eine verantwortungsbewusste Hinführung sinnvoll. Alltagspraktische Lösungen werden in Problemlöseaufgaben, wie sie besonders im Sachrechnen auftreten,

245 gefordert. Hier wenden Kinder und Jugendliche ihre rechnerischen Fähigkeiten an und üben sich im Umgang mit verschiedenen Darstellungsformen. Ihre verbalen Möglichkeiten setzen sie ein, um mathematische Probleme und deren Lösungen zu beschreiben und zu diskutieren. Kinder differenzieren weiterhin Größenvorstellungen aus, und sie können mit Größen in ihren verschiedenen Einheiten rechnen. Die sich bei Kindern und Jugendlichen

250 ausdifferenzierende Raumvorstellung führt zu Orientierungsvermögen und dem Erkennen von Lagebeziehungen zwischen Objekten in der Ebene und im Raum. Dazu gehört auch, sich Bewegungen im Raum und in der Ebene gedanklich vorstellen zu können. Auf dieser Grundlage können sie geometrische Grundformen und deren Beziehungen untereinander betrachten, beschreiben und analysieren. Standen Kindern und Jugendlichen bei

255 elementaren mathematischen Bildungsprozessen eher alltagssprachliche Bezeichnungen für mathematische Muster und Probleme zur Verfügung, so erwerben sie innerhalb der primären mathematischen Bildungsprozesse theoretische Begriffe wie beispielsweise Rechnen mit ganzen(natürlichen) Zahlen, Aussehen geometrischer Körper. Ziel der primären Bildungsprozesse ist, dass Kinder und Jugendliche ein Verständnis für

260 zahlenbezogene (numerische) sowie elementar geometrische Fragestellungen des Alltags

und deren Lösungen entwickeln. Dazu gehören auch Kenntnisse über Problemlösungsmöglichkeiten sowie die Einsicht, dass Lösungen auf verschiedenen Wegen und mit unterschiedlichen Methoden gefunden werden können. Kinder und Jugendliche sind in der Lage, mit den passenden alltagssprachlichen und theoretischen Begriffen zu kommunizieren, adäquate Fragen zu stellen und sich Problemlösungen selbstständig zu erarbeiten.

Heteronom expansive mathematische Bildung

Heteronome Bildungsprozesse sind allem dadurch gekennzeichnet, dass Kinder und Jugendliche aufgrund der fortschreitenden Entwicklung auch komplexere mathematische Problemlösestrategien in vielfältigen Kontexten anwenden. Sie sind zunehmend in der Lage, aus bestimmten Annahmen selbstständig Schlussfolgerungen zu ziehen.

Mathematische Operationen sind nicht mehr nur an konkrete Gegenstände gebunden, sondern können auch für hypothetische Fragestellungen verwendet werden (*Abstraktionsprozess der Wahrnehmung*). Die Bedeutung formaler Operationen nimmt damit zu. Zudem sind Kinder und Jugendliche zunehmend in der Lage, bei der Lösung von Problemen systematisch, in mehreren Schritten vorzugehen, eine für die mathematische Bildung grundlegenden Fähigkeit. Kinder und Jugendliche erwerben zunehmend die Fähigkeit zum *Modellieren*, also die Realität in mathematische Begrifflichkeiten zu übertragen (und umgekehrt).

Rechenoperationen werden ständig und teilweise beiläufig in alltäglichen Situationen durchgeführt. Mathematisches Verständnis wird hier vor allem für das Abschätzen (heuristisches Vorgehen) von beispielsweise Mengen oder Größen benötigt. Im heteronomen Bildungsabschnitt treten viele alltägliche Situationen hinzu, die einen sicheren Umgang mit Mathematik verlangen so z.B. Messungen für Konstruktionen oder beim Umgang mit Geld (insbesondere in Verbindung mit Banken). Auch die Fähigkeit systematisch vorzugehen und logische Schlüsse („Denkschule“) zu ziehen, wird für die Realisierung eigener Projekte zunehmend bedeutsamer.

In der Schule nehmen Kinder und Jugendliche Mathematik oft nur noch als Formalismus wahr. Dieser Situation ist im Mathematikunterricht wirksam entgegenzutreten, zum Beispiel durch die Auswahl alltagsnaher Aufgaben und Probleme, sowie das Eröffnen von Räumen zum heuristischen Arbeiten und Experimentieren.

Autonom expansive mathematische Bildung

Im Rahmen autonomer Bildungsprozesse ist die ständige und sichere Verwendung mathematischer Operationen grundlegend für die zunehmend selbstständige Gestaltung des eigenen Lebens.

Die Fähigkeit systematisch zu handeln und logisch zu denken wird in vielen alltäglichen Bereichen entscheidend. Auch formale mathematische Operationen sind zunehmend zur Lösung von Alltagsproblemen notwendig. Die Fähigkeit des mathematischen *Modellierens* entwickelt sich weiter und wird in vielen Situationen anwendbar. Es wird ein Verständnis für *funktionale Zusammenhänge* entwickelt. Kinder und Jugendliche sind in der Lage verschiedenste Probleme mit mathematischen Hilfsmitteln zu lösen. Wichtige Begrifflichkeiten und Konzepte für das *mathematische Argumentieren* treten hinzu, wie z.B. Chance und Wahrscheinlichkeit sowie exponentielles Wachstum. Diese Begriffe helfen zunehmend Phänomene der Welt, wie z.B. ökonomische und ökologische Entwicklungen, zu verstehen, bzw. überhaupt erst sichtbar zu machen. Zudem lernen Kinder und Jugendliche mathematische Darstellungen (z.B. Graphen und Diagramme) zu verstehen und einzusetzen. Mathematische Bildung ist damit in vielerlei Hinsicht wichtig für die Lebensplanung.

Wichtig wird die Bedeutung der Mathematik auch in Bezug auf weitere Bildungsverläufe in Beruf oder Studium. In vielen Bereichen spielen mathematische Konzepte als Bezugswissenschaft eine Schlüsselrolle, beispielsweise in technischen und kaufmännischen Berufsausbildungen. Hierfür erlernen Kinder und Jugendliche oft erweiterte mathematische Fähigkeiten. Auch für viele Bereiche einer wissenschaftlichen Weiterbildung an Hochschulen spielen mathematische Konzepte eine entscheidende Rolle. Für viele Kinder und Jugendliche sind daher entsprechend vorbereitende Angebote wichtig, die sich auf diese speziellen (Experten-)Bereiche beziehen.

Tabellen

Tabelle Basale mathematische Bildung

Basale Bildung	Dimensionen von Bildung		
	personal	sozial	sachlich
<p>Entwicklungs- und Bildungsaufgaben</p>	<p>Bildung aus individueller Perspektive Kinder entdecken ihren Körper und orientieren sich im Raum. Sie beobachten das Kommen und Gehen ihrer Bezugspersonen sowie das Auftauchen und Verschwinden von Gegenständen. In alltäglichen Handlungszusammenhängen (bei Mahlzeiten, bei der Körperpflege, beim Spielen) erleben sie, wie Mengen größer oder kleiner, geteilt und zusammengeführt werden. Natürliche, soziale und künstlerische Elemente der Umwelt werden nach wiederkehrenden und neuen Mustern erkundet. Insbesondere beim Ordnen und Sortieren von interessanten Gegenständen wird das Erkennen von gemeinsamen und unterscheidenden Eigenschaften vorbereitet. In verschiedenen Kontexten lassen und probieren Größenverhältnisse, Proportionen und Handlungsabfolgen aus. In diesen Erkundungen entdecken sie Ursache- Wirkungs-Zusammenhänge.</p>	<p>Soziale Beziehungen und Austauschprozesse Erwachsene und andere Kinder unterstützen durch Versteck- und Suchspiele, durch Kinderreime usw. die Entwicklung des Körperschemas und die Orientierung im Raum. In alltäglichen Situationen regen Erwachsene zu ersten mathematischen Überlegungen an (Tischdecken, Austeilen usw.). Das Kind beobachtet andere Kinder und Erwachsene beim Zählen und bei der Verwendung von Ziffern, beim Messen und Rechnen und entwickelt durch das handlungsbegleitende Sprechen der beobachteten Bezugspersonen erste Vorstellungen vom Sinn ihrer Handlungen. Erwachsene und andere Kinder unterstützen die Entdeckung von Ziffern, von Zeichen und Symbolen in der Umgebung. So entwickelt das Kind erste Vorstellungen zum Umgang mit mathematischen Mustern und Problemen. Es wird von anderen Kindern und Erwachsenen in die Lösung alltagspraktischer mathematischer Sachverhalte und Probleme einbezogen.</p>	<p>Umweltbereiche und Umweltausschnitte Kinder stehen Räumlichkeiten zur Verfügung, die dem Bewegungs- und Erkundungsinteresse entgegenkommen, und in denen sie sich ungehindert und ungefährdet bewegen können. In diesen Räumen sind vielfältige Gelegenheiten enthalten, neue Bewegungsformen selbst auszuprobieren und verschiedene Positionen im Raum einzunehmen. Kinder sind von unterschiedlichen Materialien umgeben, die zum Hantieren, zum Ordnen, Sortieren, Zählen und Vergleichen anregen. Alltägliche Gegenstände und Situationen eröffnen Kindern die Erfahrung, dass es von manchen Dingen sehr viele, von anderen sehr wenige gibt. Sie finden in ihrer Umgebung viele große, kleine, schwere leichte, einfarbige, bunte, einfach und komplex strukturierte Gegenstände vor. Zum Ausprobieren stehen auch einfache Gerätschaften zum Vergleichen und Messen zur Verfügung.</p>

<p>Welche Ansprüche haben Kinder und Jugendliche auf Bildung?</p>	<p>Inhalte, Themen und Ansprüche aus individueller Perspektive</p> <p>Kinder bekommen die Möglichkeit, sich mit vertrauten und unbekanntem auseinander zu setzen, Bekanntes mit Unbekanntem zu vergleichen und Neues auszuprobieren (z.B. Gegensätze wie eckig und rund, Hin- und Her-Bewegung; Erkundung von neuen Räumen, Zuordnen der Spielzeuge zu Kisten bzw. Aufbewahrorten). Einzelteile werden zu einem Ganzen zusammengesetzt.</p> <p>In den unterschiedlichen Umgebungen fühlen sich die Kinder gut aufgehoben und können so Interesse an der Entdeckung und Erforschung von Räumen, Dingen, Mengen und Mustern entwickeln.</p>	<p>Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen</p> <p>In gemeinsamen (Spiel-)Situationen mit Bezugspersonen und anderen Kindern und Erwachsenen werden Räume erkundet, Funktionen (z.B. öffnen/schließen) entdeckt und Funktionen zugewiesen (z.B. Schalter an- und ausschalten). In Spielen werden einfache Reihenfolgen ausprobiert: Wer ist Erster? Wer ist am schnellsten? usw.</p> <p>Die Erkundungen sind in Spiel- und Alltagssituationen eingebunden.</p> <p>Kinder bekommen die Möglichkeit zu Bezugspersonen Kontakt aufzunehmen, diesen aufrecht zu halten und diesen Kontakt auch über eine gewisse zeitliche und räumliche Distanz hinweg aufrecht zu erhalten.</p> <p>In unterschiedlichen sozialen Kontexten erfahren Kinder Kontakt zu einer einzelnen oder zu mehreren Personen; es erlebt sich als Bestandteil einer großen Gruppe, aber auch allein.</p>	<p>Unterstützende räumliche und materielle Rahmenbedingungen</p> <p>Im Rahmen des Angebots an Materialien, Bewegungs- und Spielmöglichkeiten sowie Räumlichkeiten erkunden und begreifen Kinder Gegenstände hinsichtlich ihrer Eigenschaften und Funktionen. Alltagsgegenstände werden durch entwicklungsangemessene didaktische Materialien ergänzt (Steckfiguren, Form- und Farbtäfelchen, Material zur Sinneserziehung usw.).</p> <p>Spiel und Alltagsgegenstände laden zum Nachdenken über Mengen und Operationen (Teilen, Abzählen) ein.</p>
<p>Welche konkreten Lernarrangements können angeboten werden?</p>	<p>Konkrete Lernangebote aus individueller Perspektive</p> <p>Das Kind greift auf Angebote zurück, die seine Wahrnehmung und seine kognitiven Möglichkeiten in Bezug auf Muster und Problemlösungen herausfordern. Dabei lernt es unter anderem</p> <ul style="list-style-type: none"> • interessante und veränderbare Flächen und Strukturen kennen 	<p>Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen in konkreten Lernangeboten</p> <p>Bezugspersonen regen durch Interaktionen zu Orientierungen im Raum und in der Zeit an:</p> <ul style="list-style-type: none"> • sich zu einer Person hin und wieder von ihr weg bewegen • die Entfernungen zu anderen abschätzen und erkennen, ob sie gut 	<p>Materialien und Räume für konkrete Lernangebote</p> <p>Das Kind macht unter anderem folgende Materialerfahrungen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • glatte und runde, ruhige und bewegte Flächen • unterschiedliche Materialien, die sich in Form und Struktur wiederholt verändern lassen (Papier, Pappe, Stoffe, Folien, Bänder, Schnüre,

	<ul style="list-style-type: none"> • einen Perspektivwechsel, also die Betrachtung von oben, unten, vorn hinten, aus nächster Nähe und aus großer Entfernung • das Betrachten, Verändern und Gestalten von Mustern • das Greifen, das Festhalten, die Materialerkundung mit allen Sinnen • unterschiedlichste Raum- und Körpererfahrungen bei eigener Fortbewegung • beim Erforschen Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen • einfache Mengenverhältnisse (Vorhandensein/ Nichtvorhandensein, über mehr oder weniger • Viel) kennen 	<ul style="list-style-type: none"> • bewältigt werden können • größer werdende Entfernungen allein und ohne fremde Hilfe überwinden • Blickkontakt aufnehmen und verfolgen • Versteckspiele mit Dingen und Personen • gemeinsames gezieltes Suchen und Raumerkunden • gemeinsam Anlässe gestalten und feiern, um Sensibilität für herausgehobene Zeitpunkte und deren Wiederkehr • zu ermöglichen 	<ul style="list-style-type: none"> • Kartons, Tapeten, Knete, Kuchenteig, Flüssigkeiten usw.) • Entdecken von Mustern (Brettspiele, Ornamente und Dekorationen usw.) auf Alltagsgegenständen • Formen, Farben und Muster von Spielzeugen (Legosteine, Konstruktionsspielzeug, Bausteine usw.) • hinter großen Gegenständen kann man sich verstecken, in sie hineinkriechen, auf sie klettern usw. • öffentliche und private, geschlossene und offene Räume erkunden • im Umgang mit Alltagsgegenständen werden Ursache- Wirkungs-Zusammenhänge ausprobiert (an Vorhängen und Decken ziehen, den Standort von Möbeln verändern, Dinge aus Behältnissen ein- und wieder aussortieren usw.) • Sammeln und Vergleichen von bevorzugten Gegenständen (Knöpfe, Murmeln, Naturmaterial, ausgewählte Spielzeuge usw.), um Mengenvorstellungen auch über den eigenen Besitz aufzubauen
--	---	--	--

5 Tabelle Elementare mathematische Bildung

Elementare Bildung	Dimensionen von Bildung		
	personal	sozial	sachlich
<p>Entwicklungs- und Bildungsaufgaben</p>	<p>Bildung aus individueller Perspektive</p> <p>Kinder entwickeln ein ausgeprägtes Interesse für mathematische Muster, wenn sie in Spielhandlungen eingebunden sind (Würfel, Domino, Symbole auf Spielkarten, Spielchips usw.). In spielerischen Situationen erfahren sie auch den Vorteil der simultanen Erfassung kleinerer Mengen.</p> <p>Zunächst gewinnen die Zahlen bis 10 alltagspraktische Bedeutung: Sie werden bei der Bewältigung alltäglicher Situationen, zum Abzählen sowie zum Vergleichen herangezogen. Über diesen Zahlbereich hinaus interessieren sich Kinder für Mengen und Zahlwörter in größeren Dimensionen, die sie gemeinsam mit anderen thematisieren. Durch Zeichen und Symbole unternehmen Kinder erste Versuche, Zahlen, Muster und Größenverhältnisse zeichnerisch festzuhalten. Auf der Basis sehr unterschiedlicher Merkmale (Oberbegriff, Eigenschaften, situative Zusammengehörigkeit u.ä.) schaffen Kinder selbst neue Mengen und Muster, experimentieren mit ihnen und bezeichnen sie. Zeit- und Raumvorstellungen werden vertieft.</p>	<p>Soziale Beziehungen und Austauschprozesse</p> <p>Das Kind tritt mit Erwachsenen und anderen Kindern sowohl in Spiel- als auch in Alltagssituationen in Gespräche über mathematisierbare Problemlösungen und Muster ein.</p> <p>Die Kinder haben Gelegenheit, Erwachsene in vielfältigen beruflichen Zusammenhängen dabei zu beobachten, wie sie die Sprache der Mathematik zur Problemlösung nutzen, und mit ihnen darüber ins zu reden. In die Spielhandlungen der Kinder fließen diese Erfahrungen mit ein.</p> <p>Außerdem erhalten Kinder zahlreiche Möglichkeiten, mit Erwachsenen und anderen Kindern in bedeutsamen Alltagssituationen zu vergleichen, zu messen und zu zählen. Kinder interessieren sich zunehmend für die Möglichkeit, Problemlösungen und Muster durch Zeichen und Symbole zu kommunizieren. Im Kontext dieser Tätigkeiten wird das Interesse der Kinder an Problemlösungen und an Mustern zunehmend mathematisiert.</p>	<p>Umweltbereiche und Umweltausschnitte</p> <p>Die in der Umwelt beiläufig und zugleich konstant enthaltenen Elemente der mathematischen Sprache (Hausnummern, Seitenzahlen, Preisangaben usw.) werden ebenso zum Material der mathematischen Bildungsprozesse wie Alltagsgegenstände, Spielsachen und auch einschlägige didaktische Materialien. Von besonderem Interesse sind Materialien, die in großer Menge vorkommen; sie regen das Interesse für die Entdeckung jeweils neuer Zahlraumbereiche an.</p> <p>Hier sind in besonderer Weise Naturphänomene (Sand, Regentropfen usw.) geeignet. In der Natur (Wald, Wiese, Gärten, Teich, Fluss usw.) sowie im Umgang mit Tieren ergeben sich Möglichkeiten für die Untersuchung von Größenverhältnissen, Proportionen und Oberflächeneigenschaften.</p> <p>Im Kontext der Zeitläufe (Tag, Nacht, Woche, Monat, Jahr usw.) differenzieren sich die Einheiten der Zeitmessung aus.</p>

<p>Welche Ansprüche haben Kinder und Jugendliche auf Bildung?</p>	<p>Inhalte, Themen und Ansprüche aus individueller Perspektive</p> <p>Das Kind erhält vielfältige Möglichkeiten des Beobachtens, des Bewusstwerdens sowie der sprachlichen Darstellung der gewonnenen Eindrücke und Erfahrungen in Bezug auf Zahlen, Mengen, Muster und Problemlösungen. Der Aktionsradius des Kindes für diese Tätigkeiten breitet sich über die unmittelbare Umgebung aus.</p> <p>In alltäglichen Situationen erfährt das Kind den Sinn von Handlungen, die einen mathematischen Kontext haben (z.B. etwas aufteilen, nachprüfen, ob von einer bestimmten Menge an Gegenständen ausreichend viele vorhanden sind, ob eine bestimmte Menge an Gegenständen aufgebraucht ist).</p>	<p>Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen</p> <p>Kinder spielen gemeinsam mit anderen Kindern und mit Erwachsenen an Symbolen und Ziffern gebundene Regelspiele (wie z.B. »Mensch-ärgere-dich-nicht«). Sie erkunden verschiedene Räume (Spielplatz, Wald, Straße usw.) und erleben gemeinsam mathematische Tätigkeiten und nutzen Interaktionsprozesse, um ihre Erfahrungen mitzuteilen und zu diskutieren. In Bilderbüchern entdecken und erkennen Kinder allein und gemeinsam Mengen und Zahlen wieder. In Rollenspielen (z.B. Post, Kaufmannsladen) erproben sie Alltagshandlungen und ihre mathematischen Bezüge spielerisch.</p>	<p>Unterstützende räumliche und materielle Rahmenbedingungen</p> <p>Den Kindern stehen vielfältige Materialien zum Hantieren, zum Spielen und Basteln (Puppen, Autos, Papier, Pappe, Gummi u.ä.) zur Verfügung. Diese Materialien fordern dazu auf, mathematische Tätigkeiten auszuprobieren.</p> <p>Handlungspraktische Tätigkeiten wie Malen, Zeichnen, Kneten, Schneiden sind nutzbar, um mathematische Formen wie Dreiecke, Vierecke, Rechtecke hervorzubringen und zu erkunden. Dieses Angebot an eher unstrukturierten Materialien wird um einschlägiges didaktisches Material ergänzt.</p>
<p>Welche konkreten Lernarrangements können angeboten werden?</p>	<p>Konkrete Lernangebote aus individueller Perspektive</p> <p>Das Kind greift auf Angebote zurück, die insbesondere seine kognitiven und seine sprachlichen Möglichkeiten herausfordern. Zugleich differenzieren sich seine Möglichkeiten des Beobachtens, des Bewusstwerdens, der sprachlichen Kommunikation über die gewonnenen Eindrücke und Erfahrungen aus. Diese Entwicklung wird u.a. durch folgende Angebote unterstützt:</p> <ul style="list-style-type: none"> • praktische Tätigkeiten wie Formen, Malen, Schneiden, Basteln, Kneten, Zeichnen, Backen nutzen, um 	<p>Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen in konkreten Lernangeboten</p> <p>Mathematische Bildungsprozesse sind in soziale Interaktionen integriert. Sinnvoll sind unter anderem die folgenden Interaktionsmöglichkeiten:</p> <ul style="list-style-type: none"> • gemeinsame Spiele und Erkundungen des Raumes (Wälder, Spielplätze, öffentliche Gebäude, tägliche Wege usw.) • mit anderen Kindern und Erwachsenen Entfernungen zu Fuß, per Zug, mit dem Auto usw. überwinden, Geschwindigkeiten 	<p>Materialien und Räume für konkrete Lernangebote</p> <p>Das Kind setzt sich mit Mustern und Problemlösungen auseinander:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Material zum Spielen und Basteln, zum Zählen, Ordnen und Vergleichen • Waagen, Thermometer, Lineale, Uhren u.a. werden selbstständig gehandhabt und ausprobiert • Räume sind bestimmten Anlässen und Gelegenheiten vorbehalten und entsprechend gestaltet (Ruhe/Bewegung/ Lernen/Arbeit usw.); dadurch werden differenzierte Körper- und Raumerfahrungen

	<p>geometrische Formen zu entdecken</p> <ul style="list-style-type: none"> • Erkunden und Unterscheiden von vielfältigen Objekten mit unterschiedlichsten Eigenschaften und verschiedenen Möglichkeiten des Ordnen, Sortierens und Vergleichens • unterschiedlichste Möglichkeiten des Abzählens, sicheres Abzählen bis zur Zahl 10 und Interesse an größeren Zahlräumen; simultanes Mengenerfassen • Mengenvergleiche über Stück-für-Stück-Zuordnung, Paarbildung und durch Abzählen sowie durch simultanes Mengenerfassen • Zuordnen von sinnvollen Gegenständen (Geschirr, Kleidung usw.) • Erkennen, Nutzen und Verwenden von Abbildungen und Symbolen • Erforschen von Größen- und Formzugehörigkeiten • Entdecken und Ausprobieren von vielfältigen Material und Objekteigenschaften und Nutzung dieser Eigenschaften, um nach ausgewählten Kriterien zu sortieren und Mengen zu bilden (Sortieren nach Oberbegriffen, nach sachlogischer Zusammengehörigkeit usw.) 	<p>wahrnehmen, gemeinsam Karten von Wohnungen, Institutionen und von alltäglichen Wegen herstellen</p> <ul style="list-style-type: none"> • mit Erwachsenen Karten, Atlanten, Fahrpläne usw. untersuchen • gemeinsame Funktionserkundungen, Reparaturen (Roller, Fahrrad, Spielzeuge usw.) vornehmen • Gemeinsame Brettspiele und Abzählreime unterstützen das Vertraut werden mit Zahlwörtern • in Regel-, Funktions- und Rollenspielen Zahlen erkennen und nutzen • Notizen von Erwachsenen und anderen Kindern empfangen, entschlüsseln und beantworten (Austausch von Rezepten, Einkaufszetteln, Tausch von Telefonnummern, Adressen, Visitenkarten) • gemeinsame Gestaltung und Reflexion von Höhepunkten am Tag, im Jahr usw. unter Einbeziehung von Kalendern, Uhren, Thermometern • in der Gruppe Kardinalzahlen und Ordinalzahlen spielerisch verwenden: • Wie viele Jungen und/oder Mädchen sind da? • Wie alt sind die einzelnen Kinder? • Welches Kind ist am größten/welches ist am kleinsten? 	<p>möglich</p> <ul style="list-style-type: none"> • Erforschung von öffentlichen Institutionen (Post, Bahnhof, Schule, Laden, Rathaus, Friseur usw.) nach Zahlen, Mustern und Problemlösungen (Funktion von Autokennzeichen, Briefmarken, Geldscheinen, Preisen, Fahrscheinen, Gewichtsangaben, Hausnummern usw.) • den eigenen Körper und den eigenen Besitz nach Zahlen und Mustern erforschen (Schuh- und Kleidergrößen, Körperhöhe, Gewicht; Entdecken von unterschiedlichen Anzahlen am eigenen Körper wie z.B. Arme, Beine, Finger, Haare) • historische »Körpermaße« (Fuß, Elle usw.) mit dem eigenen Körper anwenden; historische Varianten des Zählens, Messens und Vergleichens ausprobieren; historische Zahlssysteme erkunden und ausprobieren • sich mit der Verwendung der besonderen Bedeutung von Zahlen in verschiedenen Medien (z.B. Märchen, Sagen, Kinderreimen und Liedern) auseinandersetzen
--	--	---	--

Tabelle Primare mathematische Bildung

Primare Bildung	Dimensionen von Bildung		
	personal	sozial	sachlich
Entwicklungs- und Bildungsaufgaben	<p>Bildung aus individueller Perspektive</p> <p>Kinder interessieren sich für mathematische Sachverhalte. Sie beschreiben reale Alltagssituationen mathematisch, lösen die zugehörige Aufgabe und beziehen die Lösung wiederum auf die realen Situationen. Kinder sind in der Lage, mathematische Sachverhalte sowohl in der Sprache des Alltags als auch mit passenden mathematischen Begriffen zu beschreiben und zu begründen (in mündlicher als auch in schriftlicher Form). Sie gewinnen somit Sicherheit im mathematischen Denken und Argumentieren. Kinder sind in der Lage, über die Bedeutung mathematischer Begriffe zu reflektieren, die sich sowohl auf arithmetische, auf elementar geometrische als auch auf elementar kombinatorische Inhalte beziehen. Kinder lesen Rechentexte und verfassen diese auch selbst. Sie lesen Sinn erfassend und fragen bei Texten nach noch nicht bekannten Wörtern. Sie werden zunehmend selbstständiger im Lernen und reflektieren ihren Lernprozess. Sie entwickeln Strategien, wie sie zu mathematischen Lösungen von mündlichen und schriftlichen Rechenaufgaben kommen. Kinder lernen</p>	<p>Soziale Beziehungen und Austauschprozesse</p> <p>Kinder erleben und erforschen gemeinsam mit anderen Kindern und Erwachsenen im Alltag und in Spielsituationen mathematische Sachverhalte. In vielfältigen Situationen stellen sich ihnen bekannte und auch herausfordernde mathematische Probleme, die sie untereinander sprachlich beschreiben und mit eigenen Sichtweisen begründen. Sie haben individuelle Ideen für Problemlösungen, die sie sich gegenseitig sowohl mündlich als auch schriftlich darlegen. Die Kinder tauschen ihre subjektiv unterschiedlichen mathematischen Erfahrungen aus. Sie nennen Beispiele für ihre Vorerfahrungen und ihre Vorstellungen von mathematischen Ideen, Begriffen und Verfahren. Kinder erklären, wie sie zum Ergebnis kommen. Fehler in mathematischen Denkprozessen werden von Erwachsenen als individuelle intellektuelle Anstrengung des Kindes interpretiert; sie sind Anlass, um über die Vorstellungen des Kindes gemeinsam nachzudenken.</p> <p>In außer- und innerschulischen Bereichen kann eine Entwicklungsmischung beim Spielen und Lernen von Vorteil sein,</p>	<p>Umweltbereiche und Umweltausschnitte</p> <p>Im Austausch mit anderen erwerben Kinder differenzierte Möglichkeiten zum Beschreiben mathematischer Muster, Regelmäßigkeiten und Beziehungen sowie im Begründen. Ihnen begegnen Mengen und Zahlen in unterschiedlichen Kontexten, so dass sie die verschiedenen Zahlaspekte verstehen und gebrauchen lernen. In institutionellen Lernumgebungen reagieren sie auf offene Lernsituationen und bearbeiten selbstständig bzw. gemeinsam in Gruppen gestellte Probleme. Sie hören aber auch in einer strukturierten Lernsituation zu und unterscheiden das Wichtige vom Unwichtigen.</p> <p>Die Kinder verwenden Computersoftware und Taschenrechner. Sie wissen, dass es verschiedene Rechentechniken gibt, und interessieren sich für historische Rechengeräte und Rechenverfahren. Kinder entdecken, dass mathematische Verfahren einer Entwicklung unterworfen sind und dass Schriftliches vom Medium (z.B. Schulbuch, PC, Lexikon) abhängt. So unterscheiden sie z.B. die Symbolik beim Rechner von ihrer eigenen.</p>

	<p>mathematische Sachverhalte sowohl durch Handlungen und Veranschaulichungen als auch auf abstrakte Weise kennen.</p>	<p>indem die Unterschiede zur vergleichenden Selbstwahrnehmung führen. Auf diese Weise helfen ältere Kinder den jüngeren und teilen so ihre Erfahrungen mit.</p>	
<p>Welche Ansprüche haben Kinder und Jugendliche auf Bildung?</p>	<p>Inhalte, Themen und Ansprüche aus individueller Perspektive</p> <p>Kinder sind sich der Zuwendung seiner Bezugspersonen bei ihren Fragen nach mathematischen Sachverhalten sicher und erwarten auf ihre Fragen angemessene Antworten. Diese Antworten vertiefen wiederum weiteres Interesse an mathematischen Sachverhalten. So differenzieren sich Vorstellungen von Mustern und mathematischen Zusammenhängen weiter aus. Aus den individuellen Theorien und Hypothesen der Kinder wird gesichertes Wissen über mathematische Sachverhalte.</p> <p>Die zunächst individuellen Theorien und Hypothesen dienen als Anlass, über mathematisch nicht zutreffende Lösungswege und Lösungen nachzudenken. Kinder erfahren, dass sich Lösungen mathematischer Fragen nicht schnell ergeben müssen, sondern dass Lösungen auch längere Denkprozesse in Anspruch nehmen, in denen die Lösung gedanklich »umkreist« wird.</p> <p>Kinder:</p> <ul style="list-style-type: none"> geraten in ihrer Umwelt in Situationen, in denen sie 	<p>Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen</p> <p>Die Bezugspersonen der Kinder sind sich der Sinnzusammenhänge, in denen Mathematik eine Rolle spielt, bewusst und unterstützen die Kinder bei der Systematisierung. Kinder erleben zusammen mit anderen in institutionellen Lernumgebungen sowohl offene als auch systematisch vorbereitete Lernsituationen. Hier teilen sie ihre Vorstellungen mit und beteiligen sich aktiv an Lösungsprozessen. Kinder lernen von Kindern aus anderen kulturellen Kontexten weitere Rechenweisen und Hilfsmittel kennen. So erfahren sie, dass es für Problemlösungen oft nicht nur einen Weg gibt, sondern dass mehrere Möglichkeiten zum Ziel führen. Kinder nehmen auf andere Kinder Rücksicht, wenn diese nach noch Unverstandenen fragen und mehr Zeit zum Lernen und zum Lösen von mathematischen Problemen benötigen.</p> <p>Lehrerinnen wissen, dass:</p> <ul style="list-style-type: none"> das Lernen von Mathematik ein sich allmählich entwickelnder Prozess ist, der Zeit braucht und immer wieder Unterstützung benötigt altersgemischte Gruppen durch das 	<p>Unterstützende räumliche und materielle Rahmenbedingungen</p> <p>Situationen mit mathematischen Handlungen wie Kaufen und Bezahlen erfordern das Erkennen und Lösen mathematischer Aufgabenstellungen. In den Institutionen kindlicher Bildung sind strukturierte Angebote zur Systematisierung mathematischer Vorerfahrungen bedeutsam. Hier sind Vertiefungen für arithmetische, elementar geometrische und kombinatorische Inhalte vorgesehen. Kinder erfahren auch in Lernorten außerhalb der Schule (z.B. an ausgewählten Arbeitsplätzen Erwachsener in Betrieben und öffentlichen Institutionen) Beispiele anwendungsorientierter Mathematik, die sich u.a. auf Größen (z.B. Länge, Zeitspanne und Gewicht) beziehen.</p> <p>Lehrerinnen:</p> <ul style="list-style-type: none"> kennen aktuelle fachdidaktische Prinzipien und Methoden kennen für Kinder relevante mathematische Muster und Beziehungen in ihren verschiedenen Ausprägungen kennen für Kinder relevante Lexika und andere Nachschlagewerke stellen altersgemäße Materialien

	<p>arithmetische und geometrische Muster wahrnehmen</p> <ul style="list-style-type: none"> • entdecken mathematische Beziehungen, die aus mehreren Bereichen stammen • kommunizieren umgangssprachlich und mit mathematischen Begriffen, sowohl schriftlich als auch mündlich • festigen ihr Wissen in Einzelgesprächen und gewinnen so Sicherheit im mathematischen Denken, insbesondere beim Argumentieren • arbeiten selbstständig, insbesondere bei Hausaufgaben • wissen, dass mathematische Angaben, z.B. bei Größen, besonders genau sein müssen; sie kennen aber auch Fehlermöglichkeiten beim Messen und schätzen Größenangaben dementsprechend ein • schätzen ihren eigenen Lernprozess ein und suchen Begleitung in noch offenen Fragen und möglichen Erfahrungen • nutzen mathematisches Wissen zur Bearbeitung von naturwissenschaftlichen und technischen Fragestellungen 	<p>Kommunizieren mathematischer Sachverhalte deren Verständnis unterstützen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lernvoraussetzungen zu unterschiedlichen mathematischen Themen bei den einzelnen Kindern verschieden sind • mathematische Lernschwierigkeiten entwicklungsnotwendig sein können und kennen verschiedene Möglichkeiten der Unterstützung von Kindern mit diesen Schwierigkeiten • sie Eltern und anderen Bezugspersonen detaillierte Auskunft über den Lernstand sowie Hinweise zur Vertiefung der Kenntnisse des Kindes geben <p>Kinder:</p> <ul style="list-style-type: none"> • schätzen Gruppengespräche, um ihr Verständnis darzustellen, zu überprüfen bzw. zu erweitern; um Lob zu erfahren und gemeinsame Aktionen zum Kennenlernen mathematischer Muster und Beziehungen zu planen und durchzuführen 	<p>bereit, die Möglichkeiten der Selbstkontrolle enthalten</p> <ul style="list-style-type: none"> • sind offen dafür, alltägliche Gegenstände, Zusammenhänge und Situationen innerhalb und außerhalb der Institutionen kindlicher Bildung zu nutzen, um Kinder auf Mathematik im Alltag aufmerksam werden zu lassen <p>Kinder:</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen Alltagsgegenstände wie Maßbänder, Waagen, Skalen und Anzeigen und werden so auf Größen aufmerksam • haben vielfältige Materialien zur Verfügung, um geometrische Phänomene in Alltagssituationen zu erkunden • verwenden Lexika und ähnliche Medien, um ihr Wissen selbstständig zu erweitern bzw. zu vertiefen
--	--	---	--

Welche konkreten Lernarrangements können angeboten werden?	Konkrete Lernangebote aus individueller Perspektive	Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen in konkreten Lernangeboten	Materialien und Räume für konkrete Lernangebote
	<p>Die mathematischen Kenntnisse der Kinder (über Zahlen, über das Rechnen mit ihnen, über Formen und Körper, über Kombinatorisches, über wahrscheinlichkeits- theoretische Begriffe) dienen dem kompetenten Verhalten in der alltäglichen Umgebung. Hierzu gehört:</p> <ul style="list-style-type: none"> • die Zahlzeichen und Zahlwörter bis zu 1 Million kennen und sie lesen und schreiben • zählen können (Bestimmung der Mächtigkeiten von Mengen) • natürliche Zahlen ordnen • mathematische Grundoperationen kennen und durchführen (mündlich, halbschriftlich, schriftlich) • Zeitbestimmungen verstehen und anwenden • Merkmale von Materialien erkennen und benennen: groß und klein, rund und eckig usw. • geometrische Formen kennen und zeichnen (Vielecke, Kreise usw.) • geometrische Körper (Würfel, Quader, Kugel u.a.) und ihre Eigenschaften kennen • wissen, dass mathematische Angaben, z.B. bei Größen, besonders genau sein müssen; sie kennen aber auch Fehlermöglichkeiten beim Messen und schätzen Größenangaben dementsprechend ein 	<p>Lehrerinnen und Lehrer wissen, dass:</p> <ul style="list-style-type: none"> • das Lernen von Mathematik ein sich allmählich entwickelnder Prozess ist, der Zeit braucht und immer wieder Unterstützung benötigt • entwicklungsgemischte Gruppen durch das Kommunizieren mathematischer Sachverhalte deren Verständnis unterstützen • Lernvoraussetzungen zu unterschiedlichen mathematischen Themen bei den einzelnen Kindern verschieden sind • mathematische Lernschwierigkeiten entwicklungsnotwendig sein können, und kennen verschiedene Möglichkeiten der Unterstützung von Kindern mit diesen Schwierigkeiten • sie Eltern und anderen Bezugspersonen detaillierte Auskunft über den Lernstand sowie Hinweise zur Vertiefung der Kenntnisse des Kindes geben <p>Kinder:</p> <ul style="list-style-type: none"> • schätzen Gruppengespräche, um ihr Verständnis darzustellen, zu überprüfen bzw. zu erweitern; um Lob zu erfahren und gemeinsame • Aktionen zum Kennenlernen mathematischer Muster und Beziehungen zu planen und durchzuführen 	<p>Lehrerinnen und Lehrer:</p> <ul style="list-style-type: none"> • kennen aktuelle fachdidaktische Prinzipien und Methoden • kennen für Kinder relevante mathematische Muster und Beziehungen in ihren verschiedenen Ausprägungen • kennen für Kinder relevante Lexika und andere Nachschlagewerke • stellen altersgemäße Materialien bereit und bieten pädagogisch-didaktisch strukturierte Lernsituationen an, die Möglichkeiten der Selbstkontrolle enthalten • sind offen dafür, alltägliche Gegenstände, Zusammenhänge und Situationen innerhalb und außerhalb der Institutionen kindlicher Bildung zu nutzen, um Kinder auf Mathematik im Alltag aufmerksam werden zu lassen <p>Kinder:</p> <ul style="list-style-type: none"> • nutzen Alltagsgegenstände wie Maßbänder, Waagen, Skalen und Anzeigen und werden so auf Größen aufmerksam • haben vielfältige Materialien zur Verfügung, um geometrische Phänomene in Alltagssituationen zu erkunden • verwenden Lexika und ähnliche Medien, um ihr Wissen selbstständig zu erweitern bzw. zu vertiefen • erkunden historische Varianten des

	<ul style="list-style-type: none">• nutzen mathematisches Wissen zur Bearbeitung von naturwissenschaftlichen und technischen Fragestellungen	<ul style="list-style-type: none">• gehen in Gruppen mathematischen Spielen, Tätigkeiten, Aufgaben, Themen und Projekten nach• sind in der Lage, sich umgangssprachlich und mit Hilfe mathematischer Begriffe gegenüber anderen Kindern und Erwachsenen mitzuteilen und ihre Ideen zu kommunizieren• gehen gemeinsam einem mathematischen Problem nach und gelangen zu einer Lösung; dabei wenden sie Geduld auf und kommunizieren ihre Ideen• entscheiden allein, mit dem Lernpartner oder in der Gruppe darüber, welche Hilfsmittel zum Bewältigen bestimmter mathematischer Probleme hilfreich sind (Taschenrechner, Computer usw.)	<p>Zählens, des Messens und des Vergleichens</p> <ul style="list-style-type: none">• nutzen Wandkarten, Atlanten und den Globus zum Vertiefen und Systematisieren mathematischer Sachverhalte (Maßstab)• nutzen Computersoftware und weitere Hilfsmittel
--	--	---	---

10 **Tabelle Heteronom expansive Mathematische Bildung**

Heteronom expansive Bildung	Dimensionen von Bildung		
	personal	sozial	sachlich
<p>Entwicklungs- und Bildungsaufgaben</p> <p>Auch komplexere mathematische Probleme können nun beschrieben und bearbeitet werden. Erstmals gelingt es, neben konkreten auch abstrakte Sachverhalte und hypothetische Fragestellungen zu erfassen. Die Fähigkeit, mathematische Operation selbständig anzuwenden, wächst ebenso wie die Fähigkeit regelgeleitet systematisch vorzugehen. Es ist auch zunehmend möglich, reale Sachverhalte mit mathematischen Begriffen zu beschreiben. Grundlegende mathematische Fähigkeiten wie Messen, Schätzen oder Rechnen werden in vielzähligen Alltagssituationen angewendet.</p> <p>Es entwickelt sich die Fähigkeit, die Bedeutung von Mathematik für die Gesellschaft reflektieren zu können.</p>	<p>Bildung aus individueller Perspektive</p> <p>In alltäglichen Situationen kommt es immer öfter zum Austausch über mathematische Probleme, bewusst und unbewusst. Die entstehenden Fragestellungen werden formuliert und untereinander ausgetauscht. Dadurch können Ansätze abgeglichen, gemeinsam reflektiert und auf ihre Gültigkeit überprüft werden. Bei der gemeinsamen Bearbeitung und Erschließung mathematischer Sachverhalte entwickeln sich die individuellen mathematischen Fähigkeiten weiter. Auch mit zunehmender Problemlösefähigkeit des einzelnen bleibt Interaktion und Kommunikation beim Mathematiklernen bedeutsam.</p>	<p>Soziale Beziehungen und Austauschprozesse</p> <p>In vielen alltäglichen Kontexten entstehen mathematische Fragen. Zahlen, Mengen, Größen sind fester Bestandteil der Umwelt.</p> <p>In institutionellen Settings werden in unterschiedlichen Lernarrangements auch komplexe mathematische Probleme bearbeitet.</p>	<p>Umweltbereiche und Umweltausschnitte</p>
<p>Welche Ansprüche haben Kinder und Jugendliche auf Bildung?</p> <p>Situationen für mathematische Bildung ergeben sich sowohl in ungeplanten alltäglichen Situationen als auch in vorbereiteten Lernumgebungen. Die</p>	<p>Inhalte, Themen und Ansprüche aus individueller Perspektive</p> <p>Bezugspersonen, insbesondere Erwachsene unterstützen beim Erkennen und Bearbeiten mathematischer Probleme; sie unterstützen aber vor allem</p>	<p>Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen</p> <p>Unzählige alltägliche Situation können für mathematische Bildung genutzt werden. Dazu zählt vor allem der Umgang mit Geld, z.B. beim Einkaufen, der</p>	<p>Unterstützende räumliche und materielle Rahmenbedingungen</p>

	<p>Auseinandersetzung mit komplexeren mathematischen Fragestellungen hilft, Abstraktionsfähigkeit zu entwickeln. Durch Anlässe, alltägliche Situationen als mathematische Probleme zu formulieren, entwickelt sich die Fähigkeit des mathematischen Modellierens.</p> <p>Dabei ist es wichtig, dass über die eigenen Konzepte und Modelle ohne Angst vor Fehlern reflektiert werden kann.</p> <p>Gerade in Kombination mit anderen Bildungsbereichen wie z.B. Naturwissenschaft oder Zivilgesellschaftlicher Bildung ergeben sich Möglichkeiten über Messungen, Berechnungen, Zählungen mathematische Fähigkeiten anzuwenden und zu vertiefen.</p> <p>das selbstständige Vorgehen. Gerade im Dialog mit anderen können mathematische Konzepte auf ihre Gültigkeit überprüft und gefestigt werden. Dabei ist es vor allem wichtig, dass Erwachsene eine Kultur etablieren, in der mit Fehlern in mathematischen Denkprozessen konstruktiv umgegangen wird. Fehler können dann als Bildungschance genutzt werden, wenn über Konzepte und Modelle gemeinsam reflektiert wird. Problemlösungen werden grundsätzlich als „open ended“ betrachtet, d.h. es wird nicht nur ein Lösungsansatz als richtig betrachtet, sondern auch Alternativen eingeräumt.</p> <p>Mathematische Bildung muss in einem Umfeld stattfinden, in dem andere, insbesondere auch Peers, rücksichts- und verständnisvoll vor allem in Bezug auf unterschiedliche Entwicklungsstände reagieren.</p> <p>zunehmend selbstständiger und beiläufiger stattfindet. Ebenso gehört dazu das Berechnen von Zeitspannen und Größen oder das Einschätzen Geschwindigkeiten oder Gewicht.</p> <p>Technische Hilfsmittel wie Computer und Rechner stehen zu Verfügung, wodurch z.B. mathematische Probleme visualisiert oder Rechenoperationen verkürzt werden können. Zentral ist dabei, dass diese Werkzeuge nicht das Verständnis für mathematische Zusammenhänge behindern.</p> <p>Institutionelle Lernarrangements geben die Möglichkeit sich „im geschützten Rahmen“ mit mathematischen Fragestellungen auseinanderzusetzen, darüber zu reflektieren und Fehler für Lernprozesse zu nutzen.</p>
<p>Welche konkreten Lernarrangements können angeboten werden?</p>	<p>Alltägliche und pädagogisch strukturierte Situationen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Kinder und Jugendliche erhalten Möglichkeiten, bei realen (schul-)relevanten Problemen z.B. für eine Schul- oder Klassenfeier mathematische Probleme zu lösen: Anzahl und Kosten der Lebensmittel; Anzahl der Fahrten zur Beschaffung der Lebensmittel u.ä. • Jugendliche erhalten die Möglichkeit, in alltagsnahen Kontexten mathematische Fragestellungen zu bearbeiten: z.B. beim Renovieren werden benötigte Tapetenrollen, Kleister etc. ermittelt • In Austauschrunden werden gemeinsam provokante Fragen diskutiert wie z.B.: Ist Mathematik männlich? Warum gibt es weniger matheinteressierte Frauen als Männer? • In Schülerfirmen o.ä. werden Kosten berechnet, Preise kalkuliert etc. • Jugendliche erhalten die Möglichkeit, z.B. in Settings der Erlebnispädagogik, Problem zu lösen, indem beispielsweise ein Fluss mit wenigen Hilfsmitteln überquert werden muss

Tabelle Autonom expansive Mathematische Bildung

Autonom expansive Bildung	Dimensionen von Bildung		
	personal	sozial	sachlich
<p>Entwicklungs- und Bildungsaufgaben</p>	<p>Bildung aus individueller Perspektive</p> <p>Komplexe mathematische Probleme können nunmehr beschrieben werden und dienen dem Verständnis wichtiger Grundprinzipien der Umwelt. Dies bezieht zunehmend auch Fragen ein, die über alltäglich Erlebtes hinausgehen wie größere ökonomische und ökologische Zusammenhänge. Das Verständnis für die gesellschaftliche Bedeutung von Mathematik wächst; sie ist wesentliche Grundlage für Naturwissenschaften und der auf ihnen beruhenden sog. „mechanistischen“ Wissenschaften (z.B. Medizin, Agrar-, Forstwissenschaft) sowie der Ingenieurwissenschaften. Mathematische Operationen werden sicher im Alltag verwendet. Viele alltägliche Probleme können mit Hilfe mathematischer Hilfsmittel gelöst werden. Die Prinzipien des systematischen, exakten Vorgehens werden verinnerlicht und werden so auch in anderen Bereichen des Lebens anwendbar.</p>	<p>Soziale Beziehungen und Austauschprozesse</p> <p>Die Interaktion mit anderen bleibt nach wie vor wichtig, insbesondere um eigene mathematische Konzepte abzustimmen. Bezugspersonen werden als Vorbilder für die Beschäftigung mit mathematischen Themen wahrgenommen.</p> <p>Gemeinsam mit anderen können eigene Fähigkeiten und Interessen vertieft werden. Mathematische Argumentationen anderer werden verstanden und können kritisch hinterfragt und erweitert werden.</p>	<p>Umweltbereiche und Umweltausschnitte</p> <p>Die unmittelbar erlebte Umwelt bietet weiterhin viele Anlässe für mathematische Bildung. Neue Räume zur Weiterentwicklung mathematischer Fähigkeiten werden erschlossen und bereits bekannte weiterhin genutzt.</p>

Welche Ansprüche haben Kinder und Jugendliche auf Bildung?	Inhalte, Themen und Ansprüche aus individueller Perspektive	Unterstützende Interaktionen und Kommunikationsformen	Unterstützende räumliche und materielle Rahmenbedingungen
	<p>Benötigt werden Situationen in denen komplexe mathematische Zusammenhänge reflektiert werden können, bzw. um zu ergründen, welche mathematischen Anteile sich hinter einem Problem verbergen können (z.B. exponentielles Wachstum in Bezug auf Populationen in Ökosystemen oder bei wirtschaftlichen Entwicklungsprozessen). So kann die gesellschaftliche, aber auch individuelle Bedeutung von Mathematik erfasst werden.</p> <p>Entscheidend ist, dass mathematisches Wissen mit anderen Themenbereichen (insbesondere naturwissenschaftliche Fragestellungen) verknüpft werden kann und zu deren Verständnis beiträgt. Dies gilt ebenso für die Prinzipien des mathematischen Vorgehens. Dafür muss die Möglichkeit zur Reflexion über die Bedeutung mathematischer Prinzipien gegeben werden.</p>	<p>Erwachsene, Peers, Eltern unterstützen weiterhin beim Umgang mit mathematischen Fragestellungen, gerade weil der Umgang damit Voraussetzung für viele andere Bereiche (chemische und physikalische Formeln etc.) ist. Sie unterstützen dabei vor allem in Bezug auf die Selbstständigkeit. Sie geben ehrliche Rückmeldungen und würdigen die erarbeiteten mathematischen Ansätze, auch und insbesondere, wenn diese nicht nur im Rahmen vorgegebener Lösungen stattfinden. Ein positiver Umgang mit Fehlern bleibt zentral.</p> <p>In Interessengemeinschaften (Mathe-AG's etc.) besteht die Möglichkeit gemeinsam mit anderen eigenen Interessen nachzugehen und Fähigkeiten wie das mathematische Argumentieren zu vertiefen.</p> <p>Zudem werden Ergebnisse eigener Projekte für andere nachvollziehbar präsentiert.</p>	<p>Verschiedene Medien enthalten mathematische Darstellungen (wie Diagramme etc.) die verstanden und interpretiert werden.</p> <p>Die Verwendung von Computersoftware und programmierfähigen Taschenrechnern ermöglicht ein entsprechendes mathematisches Lernen. Dabei ist ein verantwortungsvoller und kritischer Umgang mit der Informations- und Kommunikationstechnik wichtig.</p>
<p>Welche konkreten Lernarrangements können angeboten werden?</p>	<p>Alltägliche und pädagogisch strukturierte Situationen:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Jugendliche haben die Möglichkeit Verständnis für nicht-lineare Zusammenhänge zu entwickeln, indem z.B. Statistiken in Medien über globale Entwicklungen o.ä. interpretiert werden • Über Meinungsumfragen zu Themen, die für Jugendliche wichtig sind, werden Fragebögen ausgewertet und deren Ergebnisse präsentiert • Jugendliche berechnen z.B. in der Fahrschule Bremswege, Transportmöglichkeiten etc. • Jugendliche haben Gelegenheiten, in alltagsnahen Kontexten mathematische Fragestellungen zu bearbeiten: z.B. in Juniorfirmen Wahrscheinlichkeiten etc. zu ermitteln • Jugendliche erhalten die Möglichkeit wissenschaftlich zu arbeiten, indem sie z.B. Pflanzen sähen, deren Wachstum erfassen und exakte Messungen und Berechnungen durchführen • Auf der Baustelle werden notwendige Stoffmengen (Ziegeln, Zement etc.) bestimmt oder Belastungen berechnet 		

Literatur

Baumert, J. u.a. (1999). *Internationales und nationales Rahmenkonzept für die Erfassung von mathematischer Grundbildung in PISA*.

Beschlüsse der Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Luchterhand.

Blum, W., Drüke-Noe, C. u.a. (Hrsg.) (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen..

Heymann, H. W. (2010). Wie viel Mathe braucht der Mensch? *Mathematik Lehren& Lernen 4/2010*. 4-7.

Piaget, J. (1978). *Das Weltbild des Kindes*. München: DTV/ Klett-Cotta.

Deutsches PISA Konsortium (Hrsg.) (2001). *PISA 2000*. Opladen.

Weigand, H.-G. (2011). Der Mathematikunterricht: Und er bewegt sich doch –nur eben langsam! *MDMV 19/2011*. 234-237.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr.61*. 37-46.

Ziegler, G. M. (2011). Mathematikunterricht liefert Antworten: Auf welche Fragen? *MDMV 19/2011*. 174-178.